

# Untersuchung der Knickstabilität eines Doppelgelenks für einen zweibeinigen Schreitroboter unter Unsicherheit

Arthur Seibel, Josef Schlattmann

Technische Universität Hamburg (TUHH), Arbeitsgebiet Anlagensystemtechnik  
und methodische Produktentwicklung (AmP), Hamburg, Deutschland  
arthur.seibel@tuhh.de

**Abstract:** In diesem Beitrag wird die Knickstabilität eines Doppelgelenks für einen zweibeinigen Roboter unter parametrischer Unsicherheit untersucht. Die unsicheren Parameter werden durch unscharfe Zahlen modelliert und die Gleichungen mit Hilfe eines analytischen Verfahrens ausgewertet. Als neuer Sicherheitskennwert wird die sog. *Möglichkeit für das Ausknicken* eingeführt, die eine Aussage über die Sicherheit eines Bauteils gegenüber einem Ausfall durch Knicken erlaubt.

**Keywords:**

Parameterunsicherheiten, unscharfe Zahlen, analytisches Verfahren, Knickstabilität, Möglichkeit für das Ausknicken

## 1 Einleitung

Die Entwicklung von sicheren, zuverlässigen sowie wirtschaftlichen Produkten erfordert ihre optimale Auslegung. Dafür müssen die Parameter in den Modellgleichungen exakt bekannt sein. In der Realität ist dies jedoch nur selten der Fall, da die Parameter oft mit einem mehr oder weniger hohen Grad an Unsicherheit behaftet sind. Solche Unsicherheiten sind entweder das Resultat eines Zufallsprozesses (aleatorische Unsicherheiten), wie beispielsweise fertigungsbedingte Streuungen, oder resultieren aus einem Mangel an Information (epistemische Unsicherheiten) (Oberkampf et al. 2002). Beispiele für letztere sind Vagheit oder fehlendes Wissen in den Parametern bzw. Modellrandbedingungen, aber auch Defizite in der Modellbildung selbst. Demnach sind Methoden erforderlich, die Unsicherheiten bei der Auslegung von Produkten adäquat berücksichtigen können.

Ein für den Maschinenbau typisches Vorgehen zur Berücksichtigung von sowohl Parameter- als auch Modellunsicherheiten ist die Verwendung eines empirischen Sicherheitsfaktors. Dieser kann abhängig vom Anwendungsfall Werte von 1.05 bis 5, in sicherheitskritischen Fällen sogar bis zu 10 annehmen (Grote und Feldhusen 2011). Eine solche Herangehensweise erscheint allerdings als eher willkürlich und eignet sich demzufolge weniger für eine angemessene Modellierung von Unsicherheiten.

Vor diesem Hintergrund haben sich gemäß Elishakoff (1990) drei Alternativen zur Modellierung von Parameterunsicherheiten etabliert: In der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die unsicheren Parameter durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben und die Modellgleichungen durch Monte-Carlo-Methoden numerisch gelöst (Marczyk 1999). Bei der Intervall-Analyse nach Moore (1979) werden die unsicheren Parameter durch Intervalle ersetzt, wobei sich die Lösung der Gleichungen aus der Lösung eines globalen Optimierungsproblems ergibt. Die dritte und somit letzte Methode, die auf der Theorie unscharfer Mengen nach Zadeh (1965) basiert, besteht in der Modellierung der unsicheren Parameter durch unscharfe Zahlen (Dubois und Prade 1980) und der Auswertung der Modellgleichungen unter Verwendung des Erweiterungsprinzips (Zadeh 1975).

Kürzlich wurde von Seibel und Schlattmann (2013) ein analytisches Verfahren zur Auswertung von monotonen Gleichungen mit unscharfen Zahlen als Parameter entwickelt, das auf einer alternativen Formulierung des Erweiterungsprinzips nach Buckley und Qu (1990) beruht. In diesem Beitrag wird dieses analytische Verfahren dazu verwendet, um ein Doppelgelenk für einen statisch stabil laufenden Schreitroboter auf Knickstabilität unter parametrischer Unsicherheit zu untersuchen. Weiterhin wird als neuer Sicherheitskennwert die sog. *Möglichkeit für das Ausknicken* eingeführt, die im Kontext der Möglichkeitstheorie (Dubois und Prade 1988) eine Aussage über die Sicherheit eines Strukturbauteils gegenüber einem Ausfall durch Knicken erlaubt.

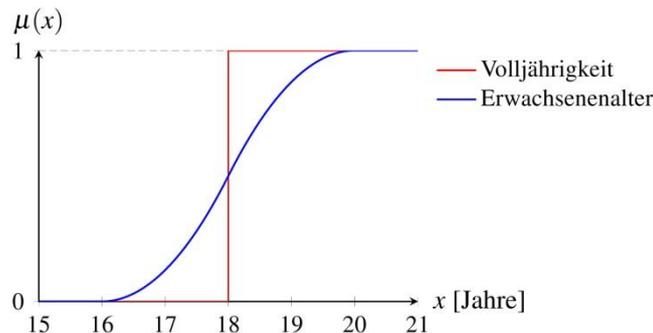
## 2 Scharfe und unscharfe Mengen

Eine *klassische* oder *scharfe Menge*  $A$  ist nach Cantor (1895) eine Zusammenfassung von Objekten oder *Elementen*  $x$  aus einem *Grundbereich*  $X$ , die eine gemeinsame Eigenschaft aufweisen. Besitzt ein Objekt diese Eigenschaft, so gehört es zur Menge  $A$ , was symbolisch durch  $x \in A$  ausgedrückt wird; andernfalls ist es aus der Menge ausgeschlossen und es gilt  $x \notin A$ . Die Zugehörigkeit eines Elements  $x$  zur Menge  $A$  lässt sich somit durch eine *charakteristische Funktion*  $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$  ausdrücken mit

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die klassische Definition einer Menge birgt jedoch auch Nachteile, die an dem folgenden Beispiel aus (Bothe 1995) aufgezeigt werden sollen.

In Bild 1 ist rot die Zugehörigkeitsfunktion der Menge der reellen Zahlen  $\geq 18$  dargestellt. Diese kann z. B. dazu verwendet werden, um die Menge aller *volljährigen* Bundesbürger zu beschreiben. Da das Alter der Volljährigkeit eindeutig durch den Gesetzgeber festgelegt ist, treten bei seiner Beschreibung durch eine scharfe Menge keine Probleme auf. Anders sieht es aus, wenn anstatt der Volljährigkeit der Bürger ihr *Erwachsenenalter* betrachtet wird. Da für das Erwachsensein keine genaue Altersangabe gemacht werden kann, ist in einem solchen Fall eher ein gradueller Verlauf der Elementzugehörigkeit, wie er in Bild 1 beispielhaft blau eingetragen ist, sinnvoll.



**Bild 1:** Zugehörigkeitsfunktion einer scharfen (rot) und einer unscharfen Menge (blau)

Eine Erweiterung der Zugehörigkeiten von Elementen auf das Einheitsintervall  $[0,1]$  führt unmittelbar auf das Konzept einer unscharfen Menge (Zadeh 1965):

Gegeben sei eine scharfe Grundmenge  $X$ . Eine *unscharfe Menge*  $\tilde{A}$  über  $X$  besitzt die *verallgemeinerte Zugehörigkeitsfunktion*  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ , die jedem Element  $x \in X$  eine reelle Zahl aus dem Einheitsintervall  $[0,1]$  zuordnet. Der Wert von  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  wird als *Zugehörigkeitsgrad* von  $x$  zur unscharfen Menge  $\tilde{A}$  bezeichnet.

Für eine nähere Beschreibung unscharfer Mengen ist die Definition einiger Kenngrößen erforderlich (Hanss 2005):

Die *Stützmenge*  $\text{supp}(\tilde{A})$  (engl. *support*) einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist die scharfe Menge aller  $x \in X$  mit positiven Zugehörigkeitsgraden:

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

Eine Verallgemeinerung dieser Definition führt auf den Begriff der  $\alpha$ -Niveau-Menge:

Die  $\alpha$ -Niveau-Menge oder der  $\alpha$ -Schnitt  $A(\alpha)$  einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist die scharfe Menge aller  $x \in X$ , deren Zugehörigkeitsgrade nicht unterhalb eines Schwellwerts  $\alpha \in (0,1]$  liegen:

$$A(\alpha) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Die *Höhe*  $\text{hgt}(\tilde{A})$  (engl. *height*) einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  ist das Supremum (oder das Maximum, bei einer endlichen Grundmenge  $X$ ) ihrer Zugehörigkeitsfunktion:

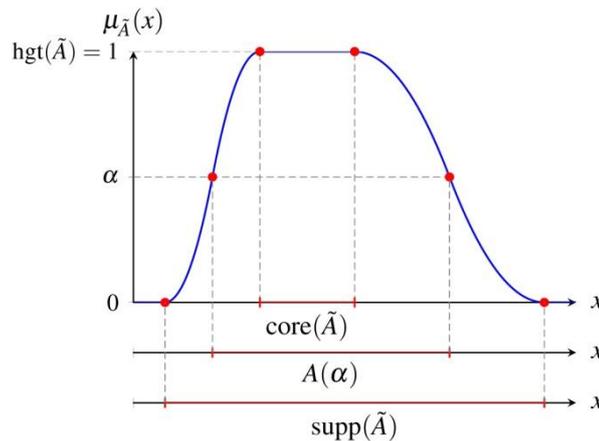
$$\text{hgt}(\tilde{A}) = \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}.$$

Hat eine unscharfe Menge die Höhe 1, so wird sie als *normal* bezeichnet; andernfalls als *subnormal*. In den folgenden Ausführungen soll stets von normalen unscharfen Mengen ausgegangen werden. Der *Kern*  $\text{core}(\tilde{A})$  (engl. *core*) einer unscharfen Menge  $\tilde{A}$  entspricht ihrer 1-Niveau-Menge:

$$\text{core}(\tilde{A}) = A(1) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

Aus dieser Definition lässt sich schließen, dass nur normale unscharfe Mengen einen nichtleeren Kern besitzen.

Die Kenngrößen Stützmenge,  $\alpha$ -Niveau-Menge, Höhe und Kern einer (normalen) unscharfen Menge sind beispielhaft in Bild 2 dargestellt.

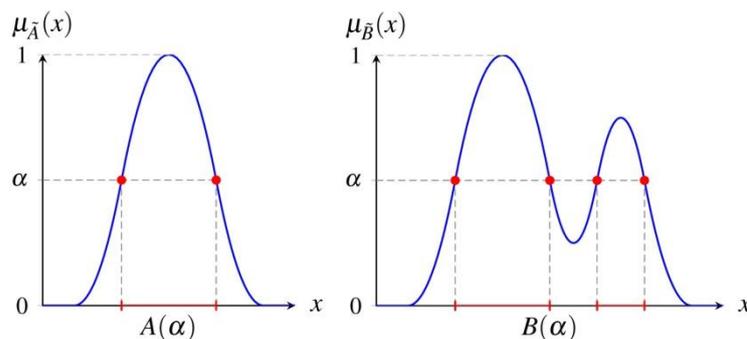


**Bild 2:** Normale unscharfe Menge  $\tilde{A}$  mit den Kenngrößen Stützmenge,  $\alpha$ -Niveau-Menge, Höhe und Kern

Für die Definition unscharfer Zahlen in Abschnitt 3 ist zudem die Konvexität einer unscharfen Menge von Bedeutung (Bothe 1995):

Eine unscharfe Menge heißt *konvex*, wenn alle ihre  $\alpha$ -Niveau-Mengen im mengentheoretischen Sinne konvex, d. h. zusammenhängend, sind.

Zur Illustration dieser Definition ist in Bild 3 jeweils ein Beispiel für eine konvexe (links) und eine nicht-konvexe unscharfe Menge (rechts) dargestellt.



**Bild 3:** Konvexe unscharfe Menge  $\tilde{A}$  (links) und nicht-konvexe unscharfe Menge  $\tilde{B}$  (rechts)

### 3 Unscharfe Zahlen

Unscharfe Zahlen (Dubois und Prade 1980) stellen einen Spezialfall unscharfer Mengen dar, die wie folgt definiert werden können:

Eine normale, konvexe unscharfe Menge  $\tilde{x}$  über dem reellen Zahlenbereich  $\mathbb{R}$  heißt *unscharfe Zahl*, wenn es genau ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\mu_{\tilde{x}}(\bar{x}) = 1$  und die Zugehörigkeitsfunktion  $\mu_{\tilde{x}}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  zumindest stückweise stetig ist. Der Wert  $\bar{x} = \text{core}(\tilde{x})$  wird als *Modalwert* der unscharfen Zahl  $\tilde{x}$  bezeichnet.

Theoretisch lassen sich unendlich viele Typen möglicher unscharfer Zahlen definieren. Allerdings sind für Ingenieur Anwendungen nur wenige davon relevant (Hanss 2005). Die beiden wichtigsten sollen im Folgenden näher beschrieben werden.

### 3.1 Dreiecksförmige unscharfe Zahlen

Die *dreiecksförmige unscharfe Zahl* (engl. *triangular fuzzy number*, TFN) ist aufgrund ihrer einfachen, linearen Zugehörigkeitsfunktion die am häufigsten verwendete unscharfe Zahl im Ingenieurwesen. Für die Definition einer dreiecksförmigen unscharfen Zahl mit der Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-\bar{x}}{\tau^L}, & \bar{x} - \tau^L \leq x \leq \bar{x}, \\ 1 - \frac{x-\bar{x}}{\tau^R}, & \bar{x} < x \leq \bar{x} + \tau^R \end{cases} \quad (1)$$

reicht das Triplet (Hanss 2005)

$$\tilde{x} = \text{tfn}(\bar{x}, \tau^L, \tau^R),$$

wobei  $\bar{x}$  den *Modalwert*,  $\tau^L$  die *linke* und  $\tau^R$  die *rechte Spannweite* von  $\tilde{x}$  bezeichnen (Bild 4, links). Ist  $\tau^L = \tau^R$ , so heißt die unscharfe Zahl *symmetrisch*. Ihre  $\alpha$ -Niveau-Mengen  $x(\alpha) = [x^L(\alpha), x^R(\alpha)]$  ergeben sich aus den Umkehrfunktionen der Gleichungen (1) nach  $x$ :

$$\begin{aligned} x^L(\alpha) &= \bar{x} - \tau^L(1 - \alpha), & 0 < \alpha \leq 1, \\ x^R(\alpha) &= \bar{x} + \tau^R(1 - \alpha), & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

### 3.2 Gaußförmige unscharfe Zahlen

Die *gaußförmige unscharfe Zahl* (engl. *Gaussian fuzzy number*, GFN) ist an die Normalverteilung aus der Wahrscheinlichkeitstheorie angelehnt. Für die Definition einer gaußförmigen unscharfen Zahl mit der Zugehörigkeitsfunktion

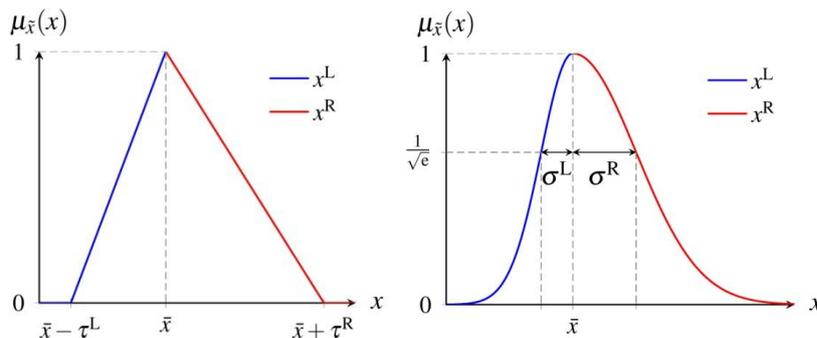
$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma^L}\right)^2\right], & x \leq \bar{x}, \\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma^R}\right)^2\right], & x > \bar{x} \end{cases}$$

genügt das Triplet (Hanss 2005)

$$\tilde{x} = \text{gfn}(\bar{x}, \sigma^L, \sigma^R),$$

wobei  $\bar{x}$  den *Modalwert*,  $\sigma^L$  die *linke* und  $\sigma^R$  die *rechte Standardabweichung* von  $\tilde{x}$  bezeichnen (Bild 4, rechts). Ist  $\sigma^L = \sigma^R$ , so heißt die unscharfe Zahl *symmetrisch*. Ihre  $\alpha$ -Niveau-Mengen lauten:

$$\begin{aligned} x^L(\alpha) &= \bar{x} - \sigma^L \sqrt{-2 \ln(\alpha)}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ x^R(\alpha) &= \bar{x} + \sigma^R \sqrt{-2 \ln(\alpha)}, & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned}$$



**Bild 4:** Dreiecksförmige unscharfe Zahl (links) und gaußförmige unscharfe Zahl (rechts)

## 4 Analytisches Verfahren

Zur Auswertung von monotonen Gleichungen mit unscharfen Parametern bietet sich das analytische Verfahren nach Seibel und Schlattmann (2013) an:

Gegeben seien  $n$  *unabhängige*, d. h. nicht-interagierende unscharfe Zahlen  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  sowie eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Weiterhin sei  $f$  in dem zu untersuchenden Bereich (streng) monoton wachsend in  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sowie (streng) monoton fallend in  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, \ell$ , mit  $k + \ell = n$ . Dann lassen sich die  $\alpha$ -Niveau-Mengen  $y(\alpha) = [y^L(\alpha), y^R(\alpha)]$  von  $\tilde{y}$  bestimmen über:

$$\begin{aligned} y^L(\alpha) &= f(x_i^L(\alpha), x_j^R(\alpha)), & 0 < \alpha \leq 1, \\ y^R(\alpha) &= f(x_i^R(\alpha), x_j^L(\alpha)), & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

mit  $x_m(\alpha) = [x_m^L(\alpha), x_m^R(\alpha)]$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Sind die Gleichungen (2) zudem invertierbar, so ergibt sich die Zugehörigkeitsfunktion von  $\tilde{y}$  aus den Umkehrfunktionen von (2) nach  $\alpha$ :

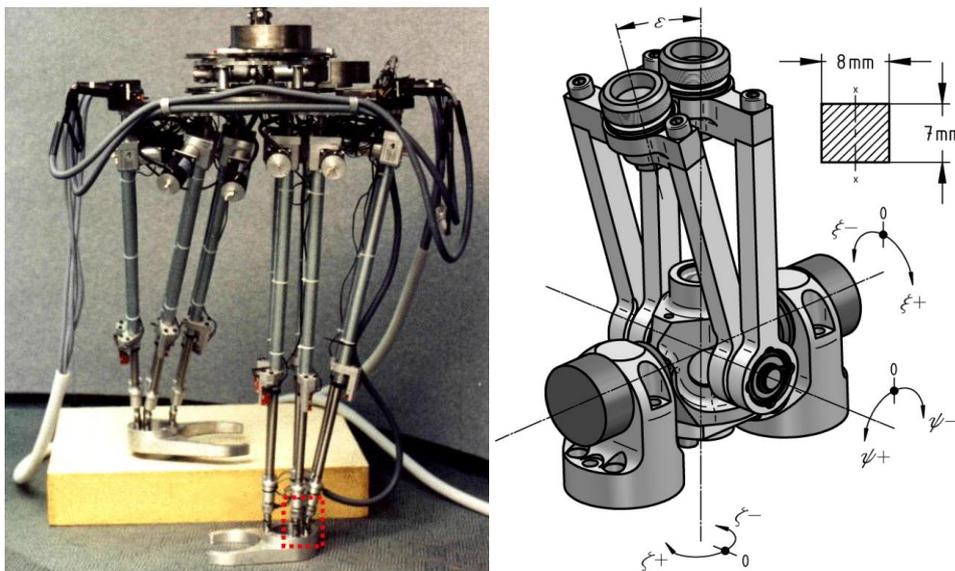
$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} y^L(\alpha)^{-1}, & y^L(0) < y \leq y^L(1), \\ y^R(\alpha)^{-1}, & y^R(1) < y < y^R(0). \end{cases}$$

Dieses Verfahren kann als die analytische Variante der sog. *Short Transformation Method* (Donders et al. 2004; Donders et al. 2005) angesehen werden.

## 5 Untersuchung der Knickstabilität

Im Arbeitsgebiet Anlagensystemtechnik und methodische Produktentwicklung der TU Hamburg steht ein unter der Leitung von Herrn Prof. Schlattmann an der Universität Paderborn entwickelter, statisch stabil laufender Zweibeinroboter (Patent Schlattmann 2000) zur Verfügung (Bild 5, links). Mit diesem Roboter wurden in der Vergangenheit bereits erfolgreich Versuche zum Gehen durchgeführt. Um dem fortschreitenden Stand der Technik, erkannten Schwächen sowie neuen Ideen Rechnung zu tragen, ist es geplant ein Nachfolgemodell zu bauen. Der prinzipielle mechanische Aufbau soll dabei weitgehend unverändert bleiben, sodass nur einzelne Komponenten verbessert werden sollen.

In diesem Zusammenhang wurde im Bereich der Anbindung zwischen Bein und Fuß ein neuartiges Doppelgelenk konstruiert (Bild 5, rechts), das eine Vereinfachung des Systems durch eine Halbierung der Schnittstellenanzahl bewirkt. Dieses Gelenk besteht aus zwei Bügeln, die durch wechselnde Zug- bzw. Druckkräfte belastet sind. Da die Schenkel der beiden Bügel zum größten Teil als schlanke Stäbe ausgebildet sind, müssen sie auf Knickung ausgelegt werden. Es wird die Stabilität bzgl. der  $x$ -Achse untersucht.



**Bild 5:** Statisch stabil laufender Zweibeinroboter (links) und neuartiges Doppelgelenk (rechts)

Unter Verwendung der Theorie II. Ordnung und der Annahme einer konstanten Biegesteifigkeit ergibt sich mit den geometrischen Randbedingungen aus Bild 5 (rechts) der Knickfall III nach Euler (Gross et al. 2012). Für die kritische Knickspannung gilt somit:

$$\sigma_K \approx \frac{(4.49)^2 E \cdot b^2}{12 \ell^2} \approx 1.68 \frac{E \cdot b^2}{\ell^2}, \quad (3)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul,  $b$  die Breite und  $\ell$  die freie Knicklänge des Schenkels bezeichnen. Die Schenkel sollen aus Aluminium gefertigt sein ( $E$ -Modul  $E = 70$  GPa) und eine freie Knicklänge von  $\ell = 115$  mm aufweisen. Der (scharfe) Wert für die kritische Knickspannung ergibt sich damit zu  $\bar{\sigma}_K \approx 569$  MPa.

In der Realität können die Werte für die Parameter in Gleichung (3) jedoch nur selten exakt angegeben werden, da sie aufgrund von fertigungsbedingten Streuungen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind. Um diese Unsicherheiten bei der Berechnung der Knickspannung zu berücksichtigen, werden die Parameter im Folgenden als (symmetrische) gaußförmige unscharfe Zahlen mit ihren Nennwerten als Modalwerte modelliert. Die Standardabweichung für den unscharfen  $E$ -Modul wird dabei zu 5% und diejenigen für die unscharfe Breite bzw. Länge des Schenkels zu 3% ihres jeweiligen Modalwertes angenommen (vgl. dazu Hanss 2005).

Die Gleichung (3) ist für positive Parameter (streng) monoton wachsend in  $E$  bzw.  $b$  sowie (streng) monoton fallend in  $\ell$ . Damit ergibt sich für die  $\alpha$ -Niveau-Mengen  $\sigma_K(\alpha) = [\sigma_K^L(\alpha), \sigma_K^R(\alpha)]$  von  $\tilde{\sigma}_K$ :

$$\begin{aligned} \sigma_K^L(\alpha) &\approx 1.68 \frac{E^L(\alpha) \cdot b^L(\alpha)^2}{\ell^R(\alpha)^2} = \frac{75264 (20 - \sqrt{-2 \ln(\alpha)}) \cdot (100 - 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}{2645 (100 + 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \sigma_K^R(\alpha) &\approx 1.68 \frac{E^R(\alpha) \cdot b^R(\alpha)^2}{\ell^L(\alpha)^2} = \frac{75264 (20 + \sqrt{-2 \ln(\alpha)}) \cdot (100 + 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}{2645 (100 - 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}, & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Da die Gleichungen (4) nicht invertierbar sind, lässt sich keine geschlossene analytische Darstellung von  $\mu_{\tilde{\sigma}_K}$  angeben. Dies ist jedoch nicht von Nachteil, da die Gleichungen (4) für eine weitere Analyse völlig ausreichend sind. Der implizite Graph von (4) ist für den Bereich  $\sigma_K \in [300, 1100]$  MPa in Bild 6 (rechts) dargestellt.

Die reale Druckspannung  $\sigma_D$ , die sich in einem Schenkel einstellt, ist abhängig von der angreifenden Betriebskraft  $F$  sowie der Breite  $b$  bzw. Höhe  $h$  des Schenkelquerschnitts:

$$\sigma_D = 0.5 \frac{F}{b \cdot h}. \quad (5)$$

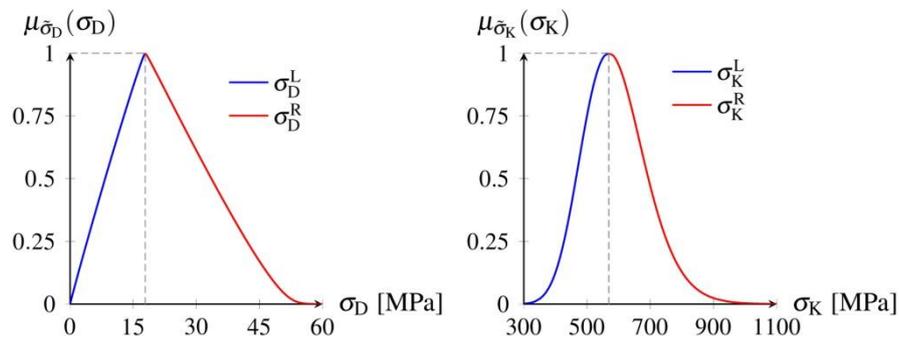
Der Vorfaktor 0.5 ergibt sich aus der Annahme, dass sich die äußere Kraft  $F$  gleichmäßig auf beide Schenkel aufteilt. Mit einer maximalen Betriebskraft von  $F_{\max} = 2$  kN ergibt sich ihr (scharfer) Wert zu  $\bar{\sigma}_D \approx 18$  MPa.

Die äußere Betriebskraft  $F$  kann je nach Betriebszustand stark variieren. Darüber hinaus kann es zu Überlastungen der Linearantriebe kommen, die größere statische Kräfte hervorrufen als die maximale Betriebskraft  $F_{\max}$ . Diese Blockierkräfte  $F_B$  sind jedoch durch das Drehmoment der Antriebsmotoren begrenzt. Mögliche dynamische Kräfte, die aus der Drehbewegung der Antriebseinheiten resultieren, werden in diesem Beitrag nicht berücksichtigt.

Wegen der oben beschriebenen (epistemischen) Unsicherheiten ist es sinnvoll, die Betriebskraft  $F$  als unscharfe Zahl zu modellieren. Da keine Information über die Verteilung von  $F$  zur Verfügung steht, sondern lediglich die maximale Betriebskraft  $F_{\max}$  sowie die Blockierkraft  $F_B = 5$  kN bekannt sind, wird die äußere Kraft  $F$  als dreiecksförmige unscharfe Zahl mit dem Modalwert  $\bar{F} = F_{\max}$  sowie der linken Spannweite  $\tau_F^L = 2$  kN und der rechten Spannweite  $\tau_F^R = 3$  kN modelliert. Die unscharfe Höhe des Schenkelquerschnitts wird analog zur unscharfen Breite ebenfalls als (symmetrische) gaußförmige unscharfe Zahl mit dem Nennwert als Modalwert und einer 3%-igen Standardabweichung modelliert. Die Gleichung (5) ist für positive Parameter (streng) monoton wachsend in  $F$  sowie (streng) monoton fallend in  $b$  bzw.  $h$ . Damit ergibt sich für die  $\alpha$ -Niveau-Mengen  $\sigma_D(\alpha) = [\sigma_D^L(\alpha), \sigma_D^R(\alpha)]$  von  $\tilde{\sigma}_D$ :

$$\begin{aligned} \sigma_D^L(\alpha) &= 0.5 \frac{F^L(\alpha)}{b^R(\alpha) \cdot h^R(\alpha)} = \frac{1250000}{7} \frac{\alpha}{(100 + 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \sigma_D^R(\alpha) &= 0.5 \frac{F^R(\alpha)}{b^L(\alpha) \cdot h^L(\alpha)} = \frac{625000}{7} \frac{5 - 3\alpha}{(100 - 3\sqrt{-2 \ln(\alpha)})^2}, & 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Da die Gleichungen (6) ebenfalls nicht invertierbar sind, lässt sich auch für  $\mu_{\tilde{\sigma}_D}$  keine geschlossene analytische Darstellung angeben. Der implizite Graph von (6) ist für den Bereich  $\sigma_D \in [0,60]$  MPa in Bild 6 (links) dargestellt.



**Bild 6:** Unscharfe Druckspannung  $\tilde{\sigma}_D$  (links) und unscharfe kritische Knickspannung  $\tilde{\sigma}_K$  (rechts)

In Bild 6 (links) ist zu erkennen, dass der linke Zweig von  $\tilde{\sigma}_D$  aufgrund seines quasi-linearen Verlaufs durch die lineare Zugehörigkeitsfunktion von  $\tilde{F}$  dominiert wird, während ihr rechter Zweig eher einem gaußförmigen Verlauf ähnelt und folglich durch die zufälligen Schwankungen in den Geometrie- bzw. Materialparametern beeinflusst wird. Dieser Einfluss wird besonders für Druckspannungen größer 50 MPa deutlich.

Im Kontext der Möglichkeitstheorie (Dubois und Prade 1988) lässt sich die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl auch als Möglichkeitsverteilung für das Eintreten eines bestimmten Wertes für diese Zahl interpretieren. Demnach kann der Schnittpunkt zwischen  $\sigma_D^R$  und  $\sigma_D^L$  als die *Möglichkeit für das Ausknicken* (engl. *possibility of buckling*) des Schenkels aufgefasst werden. Dieser Wert entspricht damit dem kleinstmöglichen ungünstigsten Fall für die Druckspannung  $\sigma_D$  sowie dem größtmöglichen ungünstigsten Fall für die kritische Knickspannung  $\sigma_K$ . In dem vorliegenden Anwendungsfall beträgt sie (verschwindend geringe)

$$\Pi(A) \approx 4 \cdot 10^{-21}\%.$$

Es kann somit mit einer hohen Sicherheit davon ausgegangen werden, dass – zumindest im statischen Fall – kein Ausknicken des Schenkels bzgl. der  $x$ -Achse auftritt. Nach der klassischen Auslegung (vgl. Abschnitt 1) ergäbe sich ein Sicherheitsfaktor von

$$S(A) = \frac{\bar{\sigma}_K}{\bar{\sigma}_D} \approx 32.$$

## 6 Zusammenfassung und Fazit

In diesem Beitrag wurde die Knickstabilität eines neuartigen Doppelgelenks für einen statisch stabil laufenden Zweibeinroboter unter parametrischer Unsicherheit untersucht. Die unsicheren Parameter wurden durch unscharfe Zahlen modelliert und die Modellgleichungen mit Hilfe eines analytischen Verfahrens ausgewertet. Als ein neuer Sicherheitskennwert wurde die *Möglichkeit für das Ausknicken* eingeführt, die im Kontext der Möglichkeitstheorie nach Dubois und Prade (1988) eine Aussage über die Sicherheit eines Bauteils gegenüber einem Ausfall durch Knicken erlaubt.

Das vorgestellte Konzept einer *Möglichkeit* für das Ausknicken unterscheidet sich insofern von einer entsprechenden *Wahrscheinlichkeit*, dass die üblichen Interpretationen, wie z. B. aus der Bayes'schen Statistik, nicht gemacht werden können. Demnach muss das Konzept eher im Sinne eines Risikos für ein mögliches Ausknicken eines Strukturbauteils verstanden werden. Eine vollständige Theorie einer *unscharfen Zuverlässigkeit*, die auf der Möglichkeitstheorie nach Dubois und Prade (1988) beruht, ist noch in der Entwicklung (Wehrle et al. 2011).

Für den neuen Sicherheitskennwert kann als Grundlage für die Auslegung von Strukturbauteilen eine obere Schranke definiert werden, die für eine zuverlässige Funktion des Bauteils nicht überschritten werden darf.

## Literatur

- Bothe 1995 BOTHE, H.-H.: *Fuzzy Logic: Einführung in Theorie und Anwendungen*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995.
- Buckley und Qu 1990 BUCKLEY, J. J.; QU, Y.: *On using  $\alpha$ -cuts to evaluate fuzzy equations*. In: *Fuzzy Sets and Systems* 38 (1990), Nr. 3, S. 309–312.
- Cantor 1895 CANTOR, G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*. In: *Mathematische Annalen* 46 (1895), Nr. 4, S. 481–512.
- Donders et al. 2004 DONDERS, S.; VANDEPITTE, D.; VAN DE PEER, J.; DESMET, W.: *The short transformation method to predict the FRF of dynamic structures subject to uncertainty*, In: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*, S. 3043–3054, Löwen, Belgien, 2004.
- Donders et al. 2005 DONDERS, S.; VANDEPITTE, D.; VAN DE PEER, J.; DESMET, W.: *Assessment of uncertainty on structural dynamic responses with the short transformation method*. In: *Journal of Sound and Vibration* 288 (2005), Nr. 3, S. 523–549.
- Dubois und Prade 1980 DUBOIS, D.; PRADE, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- Dubois und Prade 1988 DUBOIS, D.; PRADE, H.: *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. New York: Plenum Press, 1988.
- Elishakoff 1990 ELISHAKOFF, I.: *An idea of the uncertainty triangle (Editor notes)*. In: *The Shock and Vibration Digest* 22 (1990), Nr. 10, S. 1.
- Gross et al. 2012 GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHRÖDER, J.; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. 11. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.
- Grote und Feldhusen 2011 GROTE, K.-H.; FELDHUSEN, J. (Hrsg.): *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. 23. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2011.
- Hanss 2005 HANSS, M.: *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.
- Marczyk 1999 MARCZYK, J.: *Principles of Simulation-Based Computer-Aided Engineering*. Barcelona: FIM Publications, 1999.
- Moore 1979 MOORE, R. E.: *Methods and Applications of Interval Analysis*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1979.
- Oberkampf et al. 2002 OBERKAMPF, W. L.; DELAND, S. M.; RUTHERFORD, B. M.; DIEGERT, K. V.; ALVIN, K. F.: *Error and uncertainty in modeling and simulation*. In: *Reliability Engineering and System Safety* 75 (2002), Nr. 3, S. 333–357.
- Schlattmann 2000 SCHLATTMANN, J.: *Laufmaschine und Verfahren zur Steuerung einer Laufmaschine*. Patentschrift, DE 196 37 501, 13.07.2000.
- Seibel und Schlattmann 2013 SEIBEL, A.; SCHLATTMANN, J.: *Ein analytisches Verfahren zur Auswertung von monotonen Gleichungen mit unsicheren Parametern*. In: *Konstruktion* (2013). Zur Veröffentlichung eingereicht.
- Wehrle et al. 2011 WEHRLE, E.; WEDEKIND, M.; BAIER, H.: *Fuzzy modeling of imprecise material parameters in the analysis of metal matrix composite structures*, In: *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, S. 849–859, Denver, CO, USA, 2011.
- Zadeh 1965 ZADEH, L. A.: *Fuzzy Sets*. In: *Information and Control* 8 (1965), S. 338–353.
- Zadeh 1975 ZADEH, L. A.: *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I*. In: *Information Sciences* 8 (1975), S. 199–249.